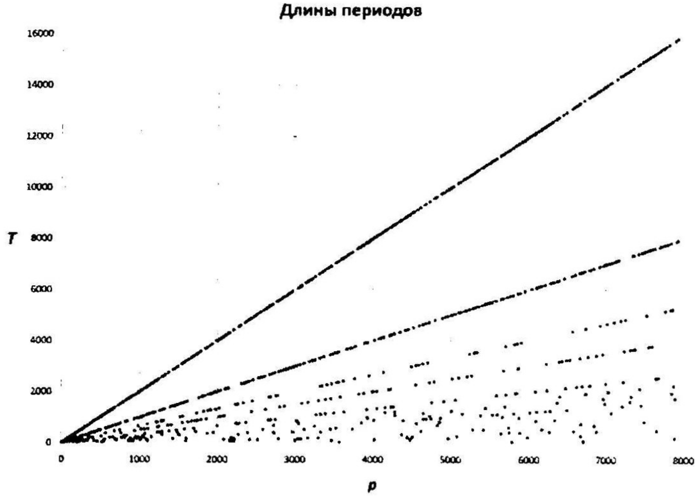

Рис. 1

И. С. Стрельцова

Астраханский государственный университет,

strelzova_i@mail.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ СЛОЕНИЙ КРИВЫХ В ГЕОМЕТРИИ МИНКОВСКОГО

Пусть M — плоскость Минковского с координатами (x, y). Как известно, данная плоскость снабжена тензорным полем $g = dy^2 - dx^2$. Пусть $\gamma : M \longrightarrow \mathbb{R}$ — слоение кривых. Такое слоение локально можно задать с помощью гладкой функции $u = u(x, y)$, дифференциал которой не обращается в нуль. Линии уровня этой функции совпадают с кривыми слоения. Функция u определена с точностью до калибровочных преобразований $u \longmapsto F(u)$, где $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция.

Собственные движения плоскости M, то есть преобразования, сохраняющие g и не меняющие ориентации, исчерпываются композициями параллельных переносов и гиперболических поворотов. Эти преобразования образуют групу Ли G движений плоскости Минковского. Пусть $\mathcal{G}$ — алгебра Ли этой группы. Введем новую координату: $v = \dfrac{u_x}{u_y}$.

Операторы

$$\nabla_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \left(v \frac{d}{dx} - \frac{d}{dy} \right)$$

и

$$\nabla_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \left(- \frac{d}{dx} + v \frac{d}{dy} \right)$$

являются $\mathcal{G}$-инвариантными дифференцированиями. Здесь $\dfrac{d}{dx}$ и $\dfrac{d}{dy}$ — операторы полного дифференцирования по переменным x и y соответственно [1].

Раскложив коммутатор $[\nabla_1, \nabla_2]$, найдем дифференциальные инварианты J_1 и J_2:

$$[\nabla_1, \nabla_2] = -J_1 \nabla_1 + J_2 \nabla_2.$$

Получим

$$J_1 = \frac{(vv_y - v_x)^2}{(v^2 - 1)^3}, \qquad J_2 = \frac{(vv_x - v_y)^2}{(v^2 - 1)^3}.$$

Это дифференциальные инварианты первого порядка. Дифференциальные инварианты второго порядка получим, действуя на них операторами ∇_1 и ∇_2:

$$J_{11} = \nabla_1(J_1), J_{21} = \nabla_2(J_1), J_{12} = \nabla_1(J_2), J_{22} = \nabla_2(J_2).$$

Укажем координатные представления одного из этих инвариантов:

$$J_{12} = \frac{1}{(v^2-1)^3}(v^4 v_{xy} + (-2v_y v_x - v_{xx} - v_{yy})v^3 + (2v_x^2 + 3v_y^2)v^2 + \\ + (-4v_y v_x + v_{xx} + v_{yy})v + v_x^2 - v_{xy}).$$

Построенные выше дифференциальные инварианты второго порядка $J_{11}, J_{21}, J_{12}, J_{22}$ функционально зависимы. Соотношение между этими инвариантами имеет вид

$$J_{12} - J_{21} + J_1^2 - J_2^2 = 0.$$

Применив к дифференциальным инвариантам второго порядка $\mathcal{G}$-инвариантные дифференцирования, получим шесть инвариантов третьего порядка:

$$J_{111}, J_{112}, J_{211}, J_{212}, J_{221}, J_{222}.$$

Всего мы получаем 12 инвариантов, порядок которых не выше трех. Аналогично можем получить дифференциальные инварианты любого порядка.

Теорема. *Базисные дифференциальные инварианты слоения кривых на плоскости Минковского относительно группы движений порождены дифференциальными инвариантами первого порядка J_1 и J_2 и их всевозможными производными по ∇_1 и ∇_2.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V. *Contact geometry and nonlinear differential equations.* – Cambridge University Press, 2007. – 496 p.